10.1.2 Rovnost funkcí, funkce signum, funkce celá část

Předpoklady: 020601, 100101

Př. 1: Rozhodni zda se rovnají funkce $f(x)=x+1$ a $g(x)=\frac{x^2+x}{x}$.

Upravíme předpis funkce $g(x)=\frac{x^2+x}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=x+1$

$\Rightarrow$ zdá se, že funkce jsou zcela stejné, ale pozor:

- do funkce $f(x)=x+1$ můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow$ $D(f)=R$
- do funkce $g(x)=\frac{x^2+x}{x}$ nesmíme dosadit nulu $\Rightarrow$ $D(g)=R-\{0\}$

$\Rightarrow$ funkce $f(x)=x+1$ a $g(x)=\frac{x^2+x}{x}$ se nerovnají.

Př. 2: Sestav přesné pravidlo na posouzení rovnosti funkcí.

Musíme zajistit, aby se rovnaly hodnoty i definiční obory $\Rightarrow$
Funkce *f* a *g* se rovnají, právě když $D(f)=D(g)$ a pro každé $x\in D(f)$ platí $f(x)=g(x)$.

Funkce *f* a *g* se rovnají, právě když $D(f)=D(g)$ a pro každé $x\in D(f)$ platí $f(x)=g(x)$.

Př. 3: U každé dvojice následujících funkcí rozhodni zda se rovnají:

a) $f(x)=|x|$, $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

b) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

c) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$

a) $f(x)=|x|$, $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

$D(f)=R$, $D(g)=\langle 0;\infty)$ $\Rightarrow$ funkce se nerovnají bez ohledu na druhou podmínku.

b) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

$D(f)=R$, $D(g)=R$, z definice absolutní hodnoty víme, že platí $\sqrt{x^2}=|x|$

$\Rightarrow$ funkce se rovnají.

c) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$

$D(f)=R-\{-1;1\}$, $D(g)=R-\{-1\}$ $\Rightarrow$ funkce se nerovnají bez ohledu na druhou podmínku.

Př. 4: Urči definiční obory funkcí tak, aby se rovnaly: $f(x)=-x$, $g(x)=|x|$.

Z definice absolutní hodnoty víme, že pro $x\in(-\infty;0\rangle$ platí $|x|=-x$ (u záporných čísel absolutní hodnota odstraní znaménko mínus) $\Rightarrow$ pokud bude platit: $D(f)=D(g)=(-\infty;0\rangle$, budou se obě funkce rovnat.

Př. 5: Jsou dány funkce $f: y=2x-1$, $g: y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. Najdi funkce $h=g\circ f$ a $i=f\circ g$ a urči jejich definiční obory. Vysvětli výsledek.

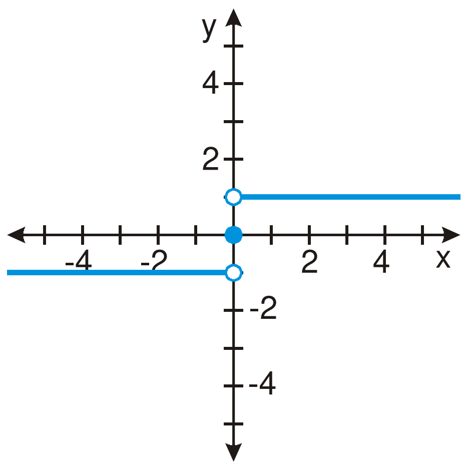
$D(f)=D(g)=R$

$h=g\circ f=g(f(x))=\frac{2x-1}{2}+\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=x$ $\Rightarrow$ funkce *f* a *g* je zřejmě navzájem inverzní (získali jsme identitu).

Stejně by měla vyjít i funkce *i*: $i=f\circ g=f(g(x))=2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)-1=x+1-1=x$.

Př. 6: Je dána funkce $y=\operatorname{sgn} x$ (signum reálného čísla). $D(f)=R$, pro $x>0$ $\operatorname{sgn} x=1$, pro $x=0$ $\operatorname{sgn} x=0$, $x<0$ $\operatorname{sgn} x=-1$. Urči její $H(f)$, nakresli graf a zkus najít české pojmenování.

Předpis funkce obsahuje tři různé případy s třemi různými hodnotami $\Rightarrow$ $H(f)=\{-1;0;1\}$.



Funkce by se mohla jmenovat znaménko.

Př. 7: Hodnota funkce *Celá část reálného čísla x* ($y=[x]$) definované pro všechna reálná čísla je celé číslo *n*, pro které platí $n\le x<n+1$. Urči obor hodnot této funkce a nakresli její graf.

Hledáme hodnotu funkce například pro $x=0,5$. Musí platit:

- $n \le x \Rightarrow n$ může být $0; -1; -2; ...$
- a zároveň má platit $x < n+1 \Rightarrow n+1$ může být 1; 2; 3; …..

$\Rightarrow$ jediná hodnota odpovídající oběma požadavkům je $n = 0$ (pak $n+1=1$).
Stejnou hodnotu získáme pro všechna čísla mezi 0 a 1.

Jaká je hodnota pro $x = 1$? Musí platit:

- $n \le x \Rightarrow n$ může být $1; 0; -1; -2; ...$
- a zároveň má platit $x < n+1 \Rightarrow n+1$ může být 2; 3; 4;…..

$\Rightarrow$ jediná hodnota odpovídající oběma požadavkům je $n = 1$ (pak $n+1=2$).

Pro čísla mezi 1 a 2 získáme opět hodnotu 1. Pro $x = 2$ bude platit: $[2] = 2$ (podobně jako u jedničky $[1] = 2$).

$\Rightarrow$ Funkce celá část funguje u kladných čísel jako "mazač desetinných míst": umaže u čísla v desetinném rozvoji vše za desetinou čárkou a nechá pouze celé číslo (celou část).

Jak to bude u záporných čísel?
Hledáme hodnotu funkce například pro $x = -0,5$. Musí platit:

- $n \le x \Rightarrow n$ může být $-1; -2; -3; ...$
- a zároveň má platit $x < n+1 \Rightarrow n+1$ může být 0 ; 1; 2; …..

$\Rightarrow$ jediná hodnota odpovídající oběma požadavkům je $n = -1$ (pak $n+1=0$).

Jaká je hodnota pro $x = -1$? Musí platit:

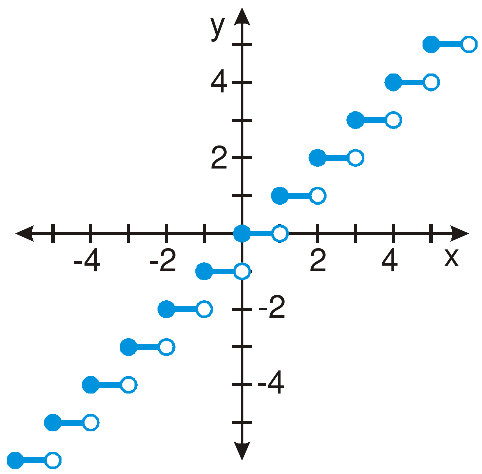
- $n \le x \Rightarrow n$ může být $-1; -2; -3; ...$
- a zároveň má platit $x < n+1 \Rightarrow n+1$ může být 0; 1; 2;…..

$\Rightarrow$ jediná hodnota odpovídající oběma požadavkům je $n = -1$ (pak $n+1=0$).

$\Rightarrow$ u záporných celých čísel funkce celá část určuje hodnotu stejně jako u kladných celých čísel (platí $[x] = x$). U necelých záporných čísel je celá hodnota o jedna menší než číslo, které získáme „odmazáním“ cifer za desetinnou čárkou (souvisí to s tím, že umazání cifer za desetinnou čárkou záporné číslo zvětšujeme, zatímco kladné zmenšujeme, přechod k číslu o jednu menšímu než zbytek po umazání desetinného rozvoje tak zajišťuje, aby hodnota funkce celá část byla menší nebo rovna číslu, ze kterého jsme vycházeli).

Oborem hodnot funkce *celá část* je množina *Z* (celá čísla).

Graf funkce



Př. 8: Petáková:
strana 23/cvičení 3 a) c)
strana 28/cvičení 42 h_2, h_4, h_5, h_6
strana 28/cvičení 43 g_2, g_5, g_6, g_7

Shrnutí: